JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 3, 167 - 178, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

METODE SIMPLEKS PRIMAL MENGGUNAKAN WORKING BASIS

Sunarsih dan Ahmad Khairul Ramdani
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

ABSTRAK

Program linier yang mensyaratkan nilai variabelnya terbatas, maka fungsi tujuannya sanagat bergantung pada nilai variabel tersebut. Fungsi tujuan optimal mensyaratkan nilai variabel memenuhi batas-batasnya. Untuk menyelesaikan program linier ini, metode simpleks dimodifikasi sedemikian hingga didapatkan solusi optimal yang kemudian dikenal sebagai "metode simpleks primal menggunakan working basis". Pencarian solusi basis fisibel dilakukan jika tiga kriteria optimalitas terpenuhi yaitu koefisien fungsi tujuan bernilai negatif variabelnya akan bernilai sama dengan batas atasnya, bernilai positif variabelnya akan bernilai sama dengan nol dan untuk variabel tanpa batas atas koefisien fungsi tujuannya non negatif.

Kata Kunci : Simpleks Primal, Working Basis, Variabel Terbatas

1. PENDAHULUAN

Pada dasarnya, metode-metode yang dikembangkan untuk memecahkan model program linier ditujukan untuk mencari solusi dari beberapa alternatif solusi yang dibentuk untuk persamaan-persamaan pembatas sehingga diperoleh nilai fungsi tujuan yang optimal. Ada dua cara yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persoalan program linier ini yaitu dengan cara grafis dan metode simpleks. Metode simpleks merupakan teknik yang paling berhasil dikembangkan untuk memecahkan persoalan program linier yang mempunyai jumlah variabel keputusan dan pembatas yang besar [1].

Dalam program linier yang mensyaratkan nilai variabelnya terbatas, fungsi tujuannya sangat bergantung pada nilai variabel tersebut. Untuk menyelesaikan persoalan program linier ini digunakan metode simpleks yang dimodifikasi sedemikian hingga diperoleh solusi yang optimal. Metode simpleks yang dimodifikasi ini dikenal sebagai "*Metode Simpleks Primal Menggunakan Working Basis*" [2].

2. KONSEP DASAR

2.1. Metode Simpleks

Metode simpleks merupakan prosedur aljabar yang bersifat iteratif, yang bergerak selangkah demi selangkah, dimulai dari suatu titik ekstrem pada daerah fisibel (ruang solusi) menuju ke titik ekstrem optimum. [1]. Misalkan model proram linier sebagai berikut:

$$\begin{array}{lccc} \text{Meminimalkan :} & \mathbf{Z} & = & \boldsymbol{cx} \\ \text{Kendala} & \boldsymbol{Ax} & = & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

dengan ***A, b, c*** dan ***x*** masing-masing adalah :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m. \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \text{ dan } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan solusi basis dari $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ maka sebanyak (n-m) variabel harus dinolkan. Variabel yang dinolkan ini disebut *variabel non basis* [4]. Selanjutnya dicari nilai dari n–(n– m) = m variabel yang memenuhi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ yang disebut *variabel basis*.

2.2. Teori Dualitas

Dalam kebanyakan pembahasan program linier, masalah dual didefinisikan untuk berbagai bentuk masalah primal, bergantung pada jenis batasan tanda dari variabel dan arti dari optimasi [7]. Setiap permasalahan program linier mempunyai suatu program linier lain yang saling berkaitan disebut dual, sedemikian hingga permasalahan semula yang disebut primal solusinya dapat diperoleh dengan menyelesaikan permasalahan dualnya.

Bentuk umum masalah primal dual adalah [6] :

Primal : Meminimalkan : $\mathbf{Z} = \boldsymbol{cx}$

Kendala $\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

Dual : Memaksimalkan $\mathbf{W} = \boldsymbol{wb}$

Kendala $\boldsymbol{wA} \leq \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{w} \geq 0$

Perubahan tanda ketidaksamaan tergantung pada fungsi tujuannya, yaitu untuk kasus maksimal semua pembatas bertanda ≤, sedangkan untuk kasus minimal semua pembatas bertanda ≥ dan semua variabel non negatif. Permasalahan maksimal/minimal semacam ini disebut permasalahan maksimal/minimal normal [5]. Sedangkan untuk permasalahan maksimal/ minimal yang tidak normal perubahannya adalah :

- Untuk permasalahan maksimal jika kendala primal x_i bertanda ≥ maka variabel dual yang berkorespondensi dengan kendala itu akan memenuhi $w_i \leq 0$. Sebaliknya, untuk permasalahan minimal jika kendala primal x_i bertanda ≤, maka variabel dual yang berkorespondensi dengan variabel tersebut akan memenui $w_i \leq 0$.
- Jika kendala primalnya x_i bertanda =, maka variabel dual w_i yang berkorespondensi dengan kendala tersebut tidak terbatas dalam tanda.
- Jika variabel primal x_i tidak terbatas dalam tanda, maka kendala dualnya y_i akan bertanda =.

3. PROGRAM LINIER DENGAN NILAI VARIABEL TERBATAS

3.1. Program Linier dengan Nilai Variabel Terbatas

Program linier dimana satu atau beberapa atau semua variabelnya terbatas pada batas bawah dan batas atas tertentu dikenal dengan *Program Linier dengan Variabel Terbatas*. Dalam aplikasinya dimana variabelnya terbatas pada bilangan tertentu (berhingga), misalnya y_j, terbatas di atas oleh k_j dan terbatas di bawah oleh l_j, dimana $l_j \leq k_j$ dan $l_j \geq 0$, [2].

Bentuk awalnya adalah :

Meminimalkan $\quad \boldsymbol{Z(y) = cy}$

Kendala $\quad \boldsymbol{Ay = b'}$

$l_j \le y_j \le k_j$ untuk $j \in \mathbf{J} = \{1, 2, \ldots, n_1\}$

(1)

$y_j \ge 0$ untuk $j \in \overline{\mathbf{J}} = \{n_1+1, n_1+2, \ldots, n\}$

dimana **A** adalah matriks order m x n. Batas l_j dan k_j berhingga dan $l_j \le k_j$ untuk semua $j \in \mathbf{J}$.

Dengan mensubstitusikan $y_j = x_j + l_j$ untuk semua $j \in \mathbf{J}$ dan $y_j = x_j$ untuk semua $j \in \overline{\mathbf{J}}$ dengan kendala variabel didapat :

$l_j \le x_j + l_j \le k_j$ untuk $j \in \mathbf{J} = \{1, 2, \ldots, n_1\}$

$y_j = x_j \ge 0$ untuk $j \in \overline{\mathbf{J}} = \{n_1+1, n_1+2 \ldots, n\}$

atau

$x_j \le U_j = k_j - l_j$ untuk $j \in \mathbf{J} = \{1, 2, \ldots, n_1\}$

$x_j \ge 0$ untuk semua j

Dengan mengubah kendala $\boldsymbol{Ay = b'}$ dengan substitusi $y_j = x_j + l_j$ untuk semua $j \in \mathbf{J}$ dan $y_j = x_j$ untuk $j \in \overline{\mathbf{J}}$ maka kendalanya berbentuk $\boldsymbol{Ay = b'}$**,** dan fungsi tujuannya berbentuk $\boldsymbol{Z(y)} = \boldsymbol{cy} = \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{cl}$ karena fungsi tujuan diminimalkan, maka Min $\boldsymbol{Z(y)}$ = Min $(\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{cl})$ dimana $\boldsymbol{cl}$ adalah konstanta, maka fungsi tujuan yang diminimalkan hanya $\boldsymbol{cx}$. Jadi fungsi tujuan barunya adalah Minimal $\boldsymbol{Z(x) = cx}$, sedangkan $\boldsymbol{Z(y)}$ = Min $\boldsymbol{Z(x)} + \boldsymbol{cl}$.

Perubahan-perubahan di atas bentuk (1) ekivalen dengan bentuk berikut :

Minimalkan $\quad \boldsymbol{Z(x) = cx}$.

Kendala $\quad \boldsymbol{Ax = b}$

$x_j \le U_j = k_j - l_j$ untuk $j \in \mathbf{J} = \{1, 2, \ldots, n_1\}$

(2)

$x_j \ge 0$ untuk semua j

Bentuk permasalahan ini merupakan bentuk umum permasalahan program linier dengan nilai variabel terbatas.

3.2. Solusi Basis Fisibel

Solusi fisibel $\bar{\mathbf{x}}$ untuk (2) adalah solusi basis fisibel jika dan hanya jika himpunan vektor kolom yang berkorespondensi dengan variabel basis yaitu $\{\boldsymbol{A}_{.j}$:j sedemikian hingga $0<\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}}< \mathbf{U}_j\} \cup \{\boldsymbol{A}_{.j}$: j sedemikian hingga $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}}> 0\}$ adalah basis linier, (2) didefinisikan sebagai *working basis* adalah submatriks bujur sangkar nonsingular dari $\boldsymbol{A}$ order m. Jika diberikan *working basis* untuk (2), maka variabel-variabel yang berkorepodensi dengan vektor kolom-vektor kolom dari *working basis* ini disebut variabel basis. Variabel-variabel selain itu disebut variabel non basis.

Dengan diberikannya working basis ini, maka solusi fisibel $\bar{\mathbf{x}}$ adalah solusi basis fisbel jika dan hanya jika ada *working basis* dimana solusi variabel non basis ini sama batas bawahnya (nol) atau batas atasnya. Nilai dari *variabel basis* harus berada diantara batas bawah (nol) dan batas atas untuk masing-masing variabel [3].

3.3. Kriteria Optimalitas

Kriteria optimalitas untuk program ini diperoleh dari hubungan primal dan dualnya. Dari permasalahan (2) dapat juga ditulis dalam bentuk :

Minimalkan $\quad \boldsymbol{Z(x)} = \boldsymbol{cx}.$

Kendala $\quad \sum_{1}^{n1} \boldsymbol{A}_{.j}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_j$

$-x_j \geq -U_j$ untuk j ε $\mathbf{J} = \{1, \ldots, n_1\}$

(3)

$x_j \geq 0$ untuk semua j

Permasalahan di atas adalah permasalahan meminimalkan yang tidak normal, selanjutnya memisalkan variabel dual bagi kendala $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ adalah $\eta_1, \ldots, \eta_m$, dan $\eta_1, \ldots, \eta_{n1}$ bagi kendala variabel $-x_j \geq -U_j$ maka dualnya adalah :

Maksimalkan : $\boldsymbol{\eta b} - \boldsymbol{\mu U}$

Kendala : $\boldsymbol{\eta A}_{.j} - \boldsymbol{\mu_j x_j} \leq \boldsymbol{c_j}$ untuk j ε $\mathbf{J}$

$\eta A_{.j} \leq c_j$ untuk j ε $\bar{\mathbf{J}}$

(4)

η tidak terbatas tanda

$\mu \geq \mathbf{0}$

Dari (3) dan (4) nilai variabel *slack* untuk masing-masing kendalanya adalah

$$c_j - \eta A_{.j} + \mu_j x_j \geq \mathbf{0} \quad \text{untuk j ε } \mathbf{J}$$

$$c_j - \eta A_{.j} \geq \mathbf{0} \text{ untuk j ε } \bar{\mathbf{J}}$$

$$U_j - x_j \geq \mathbf{0} \text{ untuk j ε } \mathbf{J}$$

Oleh karena itu solusi basis fisibel untuk (4) dipenuhi hanya jika variabel primal dan dualnya memenuhi *complementary slackness condition* sebagai berikut :

$$x_j\,(c_j - \eta A_{.j} + \mu_j) = \mathbf{0} \quad \text{untuk j ε } \mathbf{J} \tag{5a}$$

$$x_j\,(c_j - \eta A_{.j}) = \mathbf{0} \quad \text{untuk j ε } \bar{\mathbf{J}} \tag{5b}$$

$$x_j\,(U_j - x_j) = \mathbf{0} \text{ untuk j ε } \mathbf{J} \tag{5c}$$

Dengan memisalkan $c_j - \eta A_{.j} = \bar{c}_j$ merupakan koefisien fungsi tujuan ke-j pada iterasi ke-k yang optimal maka nilai x_j juga harus optimal. Fisibilitas dual mensyaratakan bahwa $\bar{\mathbf{c}}_j + \mu_j \geq 0$ untuk semua untuk j ε **J** dan $\bar{\mathbf{c}}_j \geq 0$ untuk j ε $\bar{\mathbf{J}}$. Dari fisibilitas dual tersebut maka diperoleh beberapa kemungkinan sebagai berikut :

- Untuk j ε **J,** jika $\bar{\mathbf{c}}_j < 0$ maka untuk memenuhi fisibilitas (4) diperlukan nilai $\mu_j \geq 0$ (karena $\bar{\mathbf{c}}_j + \mu_j \geq 0$ untuk j ε **J),** karena $\mu_j > 0$ maka dari (5c) didapat $x_j = \mathbf{U}_j$.
- Untuk j ε **J,** jika $\bar{\mathbf{c}}_j > 0$ dan karena $\mu_j \geq 0$ maka $\bar{\mathbf{c}}_j + \mu_j > 0$ dan dari (5a) didapat $x_j = 0$.
- Untuk j ε **J,** jika x_j nilainya berada diantara batas atas dan bawah maka dari (5a) dan (5c) dipenuhi hanya jika $\bar{\mathbf{c}}_j = 0$ dan $\mu_j = 0$.

- Untuk j ε $\overline{\mathbf{J}}$, jika $\bar{\mathbf{c}}_j > 0$ maka dari (5b) didapat $x_j = 0$.

Dari kemungkinan ini solusi fisibel untuk (2) yaitu $\bar{\mathbf{x}}$ adalah optimal jika dan hanya jika terdapat η sedemikian hingga $\bar{\mathbf{c}} = \eta A$, nilai x_j dimana $\bar{\mathbf{c}}_j > 0$ adalah nol dan nilai x_j dimana $\bar{\mathbf{c}}_j < 0$ adalah $\mathbf{U}_j$.

Misalkan $\bar{\mathbf{x}}$ adalah solusi basis fisibel untuk (2) yang berkorespodensi dengan *working basis* ***B***. Jika $\bar{\mathbf{x}}_j$ adalah variabel basis, maka nilai $\bar{\mathbf{x}}_j$ terdapat diantara 0 dan $\mathbf{U}_j$ dengan $\bar{\mathbf{c}}_j = 0$, oleh karena itu η yang bersesuaian dengan *working basis* ***B*** dapat diperoleh dengan menyelesaikan $\mathbf{c}_j - \eta A_{.j} = 0$ untuk semua j, dengan $A_{.j}$ adalah vektor kolom pada ***B***. Misalkan c_B adalah vektor koefisien harga fungsi tujuan variabel basis, maka η diperoleh dengan menyelesaikan $c_B = \eta B$, yaitu $\eta = c_B B^{-1}$. Setelah η didapat selajutnya, nilai $\bar{\mathbf{c}}$ diperoleh dari $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} - \eta A$. Dengan memandang $\bar{\mathbf{c}}$ kriteria optimalitas untuk program linier variabel terbatas adalah :

- Untuk j ε **J** dan $\bar{\mathbf{c}}_j < 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_j = \mathbf{U}_j$.
- Untuk j ε **J** dan $\bar{\mathbf{c}}_j > 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_j = 0$
- Untuk j ε $\overline{\mathbf{J}}$ dimana $\bar{\mathbf{c}}_j \geq 0$.

4. Metode Simpleks Primal Menggunakan Working Basis

4.1. Fase I

Fase I metode simpleks mencari solusi basis fisibel awal untuk (2) dengan terlebih dahulu menambahkan variabel artifisial $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ seperti pada tabel berikut :

Tabel 1. Tabel Awal Fase I

BV	x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	b
x_{n+1}	a_{11}	…	a_{1m}	$a_{1,m+1}$	….	a_{1n}	1	….	0	b_1
.	.	…	…	….	…	….	….	….	.	.
.	.	…	…	….	…	….	….	….	.	.
.	.	…	…	….	…	….	….	….	.	.
x_{n+m}	a_{1m}	…	a_{mm}	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}	0	….	1	b_m
- Z	c_1	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	0	….	0	0
- Y	d_1	…	d_m	d_{m+1}	…	d_n	1	….	1	$-\bar{Y}$

$x_j \le \mathbf{U}_j$ untuk $j \in \mathbf{J}$, $x_j \ge 0$ untuk semua j, $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ variabel artifisial.

Pada tabel kanonik awal ini variabel basisnya adalah $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, oleh karena itu *working basisnya* adalah matriks yang memuat vektor kolom-vektor kolom yang bersesuaian dengan variabel $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ atau dalam hal ini adalah matriks identitas. Misalkan dari tabel kanonik awal tersebut pada iterasi ke-k diperoleh $x_{i1}, \ldots, x_{im}$ adalah variabel basis seperti tabel berikut.

Tabel 2. Tabel Iterasi ke-k dari Tabel Kanonik Awal

BV	x_{i1}	…	x_{im}	variabel lain non basis	x_{n+1}	….	x_{n+m}	$\bar{b}$
x_{i1}	1	…	0	….	β_{i1}	…	β_{im}	$\bar{b}_1$
.	.	…	…	….	….	…	.	
.	.	…	…	….	….	….	.	.
.	.	…	…	….	….	….	.	.
x_{im}	0	…	1	….	β_{i1}	…	β_{im}	$\bar{b}_m$
- Z	0	…	0	….	$-\eta_1$	….	$-\eta_m$	$-\bar{Z}$
- Y	0	…	0	…	$-\sigma_1$	….	$-\sigma_m$	$-\bar{Y}$

Pada tabel di atas karena $x_{i1}, \ldots, x_{im}$ adalah variabel basis maka *working basisnya* adalah matriks yang memuat vektor-vektor kolom yang bersesuaian dengan variabel tersebut pada tabel kanonik awal (Tabel 1). Dengan kata lain *working basis*

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & \ldots & a_{i_1 m} \\ . & \ldots & . \\ . & \ldots & . \\ . & \ldots & . \\ a_{i_m 1} & \ldots & a_{i_m m} \end{bmatrix}$$

. Invers dari working basis adalah matriks dari variabel x_{n+1},

… , x_{n+m}, maka $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}$

Koefisien fungsi tujuan fase I dan II yang bersesuaian dengan working basis B dinamakan $\boldsymbol{c}_\mathbf{B}$ dan $\boldsymbol{d}_\mathbf{B}$. Dari Tabel 1 dengan x_{11}, …, x_{im} adalah variabel basis maka $\boldsymbol{c}_\mathbf{B}$ dan $\boldsymbol{d}_\mathbf{B}$ yang bersesuaian dengan variabel basis pada Tabel 2 adalah $\boldsymbol{c}_\mathbf{B} = (c_1,\ldots, c_m)$ dan $\boldsymbol{d}_\mathbf{B} = (d_1,\ldots, d_m)$.

Dari kriteria optimalitas variabel non basis x_j untuk j ε **J** sama dengan nol atau sama dengan batas atas $\mathbf{U}_j$. Sedangkan variabel non basis x_j untuk j ε $\overline{\mathbf{J}}$ selalu sama dengan nol. Oleh karena itu kriteria penghentian fase I diperoleh dengan memakai kriteria optimalitas untuk permasalahan program linier variabel terbatas. Karena pada fase I koefisien fungsi tujuannya adalah dimana $\bar{d}_j$ maka $\bar{c}_j$ pada kriteria optimalitas tersebut digangi dengan $\bar{d}_j$ dimana $\bar{d}_j = d_j - \boldsymbol{\sigma A_j}$.

Jadi kriteria optimalitas fase I adalah sebagai berikut :

- Untuk j ε **J** dan $\bar{\mathbf{d}}_j < 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_j = \mathbf{U}_j$.
- Untuk j ε **J** dan $\bar{\mathbf{d}}_j > 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_j = 0$
- Untuk j ε $\overline{\mathbf{J}}$ dimana $\bar{\mathbf{d}}_j \geq 0$.

4.2. Pemilihan Entering Variabel pada Fase I

Misalkan pada iterasi ke-k jika kriteria optimalitas fase I tidak dipenuhi, maka dipilih variabel non basis x_s yang akan dijadikan entering variabel pada iterasi selanjutnya. Dengan mengelompokkan semua variabel non basis lebih dulu dari pada variabel basis maka tabel pemilihan entering variabel x_s adalah sebagai berikut :

Tabel 3. Tabel Iterasi ke-k dari Tabel Kanonik Awal

BV	NBV selain x_s	x_s	x_{i1}	….	X_{n+m}	$\bar{b}$
x_{i1}	…	$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{is}}$	1	…	0	$\bar{b}_1$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
x_{ir}	…	$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{rs}}$	0	…	0	$\bar{b}_r$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
x_{im}	…	$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{ms}}$	0	…	1	$\bar{b}_m$
$-Z$	…	$\bar{\mathbf{c}}_s$	0	….	0	$\bar{-}$
$-Y$	…	$\bar{\mathbf{d}}_s$	0	….	0	$-\bar{Y}$

Variabel non basis x_s yang dipilih ini harus memiliki salah satu dari tipe berikut :

(1). Untuk s ε **J** dan $\bar{\mathbf{d}}_s < 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_s = 0$ atau,

(2). Untuk s ε **J** dan $\bar{\mathbf{d}}_s > 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{U}_s$ atau ,

(3). Untuk s ε $\bar{\mathbf{J}}$ dimana $\bar{\mathbf{d}}_s < 0$.

Variabel x_s yang memenuhi (1) atau (2) atau (3) adalah yang terpilih untuk masuk ke vektor basis. Salah satu dari x_j ini dipilih untuk menjadi entering variabel dengan kriteria pemilihan variabel basis sebagai berikut :

(a). $\bar{\mathbf{d}}_s$ = minimal $\{\bar{\mathbf{d}}_j : j = 1, \ldots, n_1\}$ untuk $\bar{\mathbf{d}}_j < 0$ dan $\bar{\mathbf{x}}_s = 0$ atau,

(b). $\bar{\mathbf{d}}_s$ = minimal $\{\bar{\mathbf{d}}_j : j = n_1 + 1, \ldots, n\}$untuk $\bar{\mathbf{d}}_j < 0$ dan $\bar{\mathbf{x}}_s = 0$ atau,

(c). $\bar{\mathbf{d}}_s$ = maksimal $\{\bar{\mathbf{d}}_j : j = 1, \ldots, n_1\}$ untuk $\bar{\mathbf{d}}_j > 0$ dan $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{U}_s$

Jika ketiga kriteria di atas terpenuhi maka dipilih $\bar{\mathbf{d}}_s$ yang akan memberikan penurunan maksimal pada fungsi tujuan fase I. Jika $\bar{\mathbf{d}}_s$ telah

Vol. 6. No. 3, 167 - 178, Desember 2003, ISSN : 1410-8518

ditentukan maka selanjutnya dicari nilai entering variabel x_s untuk variabel non basis.

Algoritma simpleks terus dilanjutkan sampai kriteria penghentian fase I dipenuhi. Jika harga fungsi tujuan fase I yaitu Y bernilai Y berhenti positif maka permasalahan awal dari program linier variabel terbatas tersebut tidak memiliki solusi fisibel. Oleh karena itu algoritma dihentikan. Sebaliknya, jika didapat nilai Y = 0 maka permaslahan awal memilki solusi fisibel dan dilanjutkan ke fase II.

4.3. Fase II

Fase II dikerjakan jika fase I didapat Y = 0 dan koefisien fungsi tujuan fase I adalah nol. Oleh karena itu kriteria penghentian fase II adalah dengan $\bar{\mathbf{c}}_j$, koefisien fungsi tujuan fase II. Kriteria optimalitas fase II adalah :

- Untuk j ε **J** dan $\bar{\mathbf{c}}_j < 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_j = \mathbf{U}_j$
- Untuk j ε **J** dan $\bar{\mathbf{c}}_j > 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_j = 0$ dan ,
- Untuk j ε $\bar{\mathbf{J}}$, $\bar{\mathbf{c}}_j \geq 0$.

4.4. Pemilihan Entering Variabel pada Fase II

Jika kriteria optimalitas fase II tidak dipenuhi, dipilih variabel non basis x_s, dan menjadikannya sebagai entering variabel x_s yang terpilih ini memiliki salah satu berikut.

(1). Untuk s ε **J** dan $\bar{\mathbf{c}}_s < 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_s = 0$ atau,

(2). Untuk s ε **J** dan $\bar{\mathbf{c}}_s > 0$ dimana $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{U}_s$ atau ,

(3). Untuk s ε $\bar{\mathbf{J}}$ dimana $\bar{\mathbf{c}}_s < 0$.

Variabel x_s yang memenuhi (1), (2) dan (3) adalah yang yang terpilih untuk masuk ke vektor basis. Salah satu dari x_j ini dipilih untuk menjadi entering variabel dengan kriteria pemilihan variabel basis sebagai berikut :

(a). $\bar{\mathbf{c}}_s$ = minimal { $\bar{\mathbf{c}}_j$: j = 1, …, n_1} untuk $\bar{\mathbf{c}}_j < 0$ dan $\bar{\mathbf{x}}_s = 0$ atau, (b). $\bar{\mathbf{c}}_s$ = minimal { $\bar{\mathbf{c}}_j$: j = n_1+ 1, …,n}untuk $\bar{\mathbf{c}}_j < 0$ dan $\bar{\mathbf{x}}_s = 0$ atau,

(c). $\bar{\mathbf{c}}_s$ = maksimal { $\bar{\mathbf{c}}_j$: j = 1, …, n_1} untuk $\bar{\mathbf{c}}_j > 0$ dan $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{U}_s$

Jika ketiga kriteria di atas terpenuhi maka dipilih $\bar{\mathbf{c}}_s$ yang akan memberikan penurunan maksimal pada fungsi tujuan fase II. Jika $\bar{\mathbf{c}}_s$ telah ditentukan maka selanjutnya dicari nilai dari entering x_s untuk variabel non basis.

5. KESIMPULAN

Program linier khusus yang mensyaratkan bahwa nilai variabel terdapat pada suatu interval bilangan (dari batas bawah sampai dengan batas atas) merupakan nilai variabel pada solusi basis fisibel yang harus dipenuhi.

Terdapat 3 (tiga) kriteria optimalitas yang harus dipenuhi yaitu koefisien fungsi tujuan bernilai negatif variabelnya akan berniali sama dengan batas atasnya, bernilai positif variabelnya akan bernilai sama dengan nol, serta untuk variabel tanpa batas atas koefisien fungsi tujuannya nonnegatif.

DAFTAR PUSTAKA

1. Dimyati, dkk, 1992. Riset Operasi : *Model-model Pengambilan Keputusan*. Sinar Baru Algensindo, Bandung.
2. Gass, Saul I., 1984. *Linear Programming : Methods and Applications*, McGraw-Hill New York.
3. Ignizio, James P, 1990. *Linear Programming in Single & Multiple Obyective System*, Prentice-Hall, New Jersey.
4. Kim, Chaiho, 1971. *Intoduction to Linear Programming*, Hult Rinehart and Winston, New York.
5. Luenberg, David D, 1994. *Linear and Non Linear Programming 2nd ed.*, Addison Wesley, Canada.
6. Murty, Katta G, 1983. *Linear Programming*. John Wiley and Sons, New York.
7. Taha, Hamdy A, 1987. *Operation Research : On Introduction 4th ed.*, Mac Millan Publishing, New York.